Studentov t-test

Najčešće upotrebljavan parametrijski test značajnosti za testiranje nulte hipoteze je Studentov t-test. Koristi se za testiranje značajnosti razlika između dve aritmetičke sredine.

Uslovi za primenu t testa:

- Obe varijable koje se testiraju moraju biti numeričke
- Ukoliko je veličina uzorka manja od 30 jedinica, raspored treba biti normalan ili bar simetričan

Za njegovo realizovanje potrebno je poznavati parametre statističkog skupa: veličinu uzorka (n), standardnu devijaciju (SD), i aritmetičku sredinu ($\overline{X}$).

Nije potrebno poznavanje varijanse osnovnog skupa, pa je ovaj tip testa praktičniji od z – testa, jer se testiranje hipoteze o aritmetičkoj sredini osnovnog skupa najčešće odvija u uslovima kada je varijansa osnovnog skupa nepoznata. U tim uslovima varijansu osnovnog skupa procenjujemo na osnovu varijanse uzorka, odnosno grešku ocene aritmetičke sredine osnovnog skupa izračunavamo na osnovu standarne devijacije uzorka po obrascu:

$$SG = \frac{SD_{uz}}{\sqrt{n-1}}$$

gde je n-1 stepen slobode.

Pod uslovom da osnovni skup uma normalan raspored ili da je n>30, a varijansa osnovnog skupa nije poznata, testiranje hipoteze zasniva se na statistici Studentovog t-testa, koji se izračunava po obrascu:

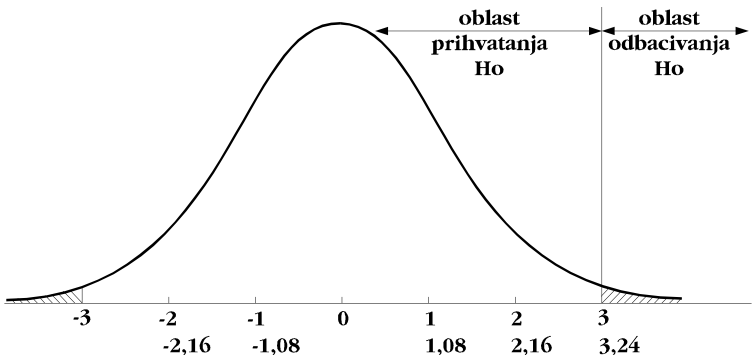
$$t = \frac{\overline{X}_{uz} - \overline{X}_{os}}{\frac{SD_{uz}}{\sqrt{n-1}}}$$

gde je $\overline{X}$ osnovnog skupa hipotetična, unapred poznata vrednost.

Studentov t-test se koristi i za testiranje razlike aritmetičkih sredina dva velika ili dva mala uzorka, gde je njegova vrednost količnik između razlike aritmetičkih sredina i standardne greške ocene te razlike, pa je njegov opšti obrazac:

$$t = \frac{razlika}{s\tan dardna \quad greška \quad ocene \quad razlike} = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{SG_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}}$$

Već smo istakli: ako se razlike aritmetičkih sredina uzoraka simetrično raspoređuju oko prave razlike, onda je logično da i njihove standardne greške imaju normalan raspored oko prave greške, pa mogu da se aproksimiraju normalnim standardizovanim rasporedom.



Tumačenje dobijene vrednsti t testa bazira se na Studentovom t – rasporedu sa određenim brojem stepena slobode i studentovim tablicama kritičnih vrednosti t – rasporeda (Prilog).

Iz svega napred rečenog proizilaze pravila:

Ako je realizovana t-vrednost manja od granične tablične vrednosti za odgovarajući broj stepena slobode i prag značajnosti, nulta hipoteza se prihvata kao tačna, a odbacuje alternativna hipoteza.

- **t-realizovano < $t_{(SS\ i\ 0,05)}$ ⇒ Ho se ne odbacuje jer je rizik veći od 5% (p>0,05)**

Obrnuto, ako je realizovana t-vrednost jednaka ili veća od granične tablične vrednosti, za odgovarajući broj stepena slobode i prag značajnosti, nulta hipoteza se odbacuje kao netačna, a prihvata se alternativna hipoteza:

- **t-realizovano ≥ $t_{(SS\ i\ 0,05)}$ ⇒ odbacuje se nulta hipoteza za nivo rizika p=0,05, odnosno za nivo sigurnosti P=0,95 (95%)**

- **t-realizovano ≥ $t_{(SS\ i\ 0,01)}$ ⇒ odbacuje se Ho i za nivo rizika p=0,01, odnosno za nivo sigurnosti P=0,99 (99%).**

Sa povećanjem uzorka t-raspored se približava standardizovanom normalnom z-rasporedu, i kod velikih uzoraka (n>30 ili $n_1+n_2>60$ jedinica) poprima sve osobine ovog rasporeda i t-vrednost se "ponaša" kao z-vrednost.

Kod velikih uzoraka gornja pravila o prihvatanju ili neprihvatanju H_0 se uprošćavaju i ne zahtevaju primenu tablice Studentovog t-rasporeda, već se zaključivanje zavisno od nivoa dozvoljene granice greške vrši na sledeći način:

za p=0,05	za p=0,01
Ako razlika padne u intervalu 0±1,96SG nije značajna; t<1,96 i Ho se prihvata; p>0,05	Ako razlika padne u intervalu 0±2,58SG nije značajna; t<2,58 i Ho se prihvata; p>0,05
Ako razlika padne van intervala 0±1,96SG značajna je; Ho se odbacuje; p<0,05	Ako razlika padne van intervala 0±2,58SG značajna je; Ho se odbacuje i za nivo p<0,01

Postoji šest tipova t testa:

- t – test razlike između aritmetičke sredine osnovnog skupa i uzorka
- t – test razlike između aritmetičkih sredina dva mala nezavisna uzorka
- t – test razlike između aritmetičkih sredina dva mala zavisna uzorka
- t – test razlike između aritmetičkih sredina dva velika nezavisna uzorka
- t – test razlike između aritmetičkih sredina dva velika zavisna uzorka
- t – test proporcije

Navedenu podelu potrebno je samo poznavati, jer računar vodi računa o malim i velikim uzorcima i na korisniku je da samo izabere vrstu t testa (jedan uzorak za t test osnovnog skupa i uzorka, upareni uzorci kod zavisnih ili neupareni kod nezavisnih uzoraka). Vrednosti testa dobijene računskim putem zbog zaokruživanja na određen broj decimala mogu se neznatno razlikovati od vrednosti dobijenih kompjuterskim programima.

t-test razlike između aritmetičkih sredina osnovnog skupa i uzorka

Testira značajnost razlike između prosečnih vrednosti osnovnog skupa i uzorka. Uslov za primenu ovog testa je da je aritmetička sredina osnovnog skupa iz iskustva poznata ili da je to unapred propisana vrednost. Na primer, u medicini propisane normalne vrenosti eritrocita, holesterola, krvnog pritiska, bilirubina, uree itd.

Osnovni skup za ove "normalne" vrednosti predstavljaju zdrave osobe.

Obrazac za ovaj test je :

$$t = \frac{\overline{X}_{uz} - \overline{X}_{os}}{SG} \qquad SG = \frac{SD_{uz}}{\sqrt{n-1}}$$

Stepen slobode se određuje po formuli: S.S. = n – 1

Ako je:

- t-realizovano < $t_{(SS\ i\ 0,05)}$, prihvata se Ho a odbacuje Ha, p>0,05,
- t-realizovano ≥ $t_{(SS\ i\ 0,05)}$,odbacuje se Ho a prihvata Ha, p < 0,05,
- t-realizovano ≥ $t_{(SS\ i\ 0,01)}$, odbacuje se Ho a prihvata Ha i za nivo p < 0,01.

Primer: Normalne vrednosti holesterola kod zdravih osoba se kreće od 3,1-5,8 mmol/l, tako da je $\overline{x_1}$ =3,1+5,8/2=4,45. Odabran je zatim uzorak od 21 (n=21) dijabetičara, određen holesterol i dobijene su vrednosti $\overline{x_2}$ =5,88 i SD=0,64.
Osnovno pitanje je da li se vrednost holesterola nalazi u granicama normale, odnosno da li se njihova prosečna vrednost od 5,88 značajno razlikuje od proseka osnovnog skupa, odnosno od 4,45.

Problem rešavamo testiranjem razlike, pa zato izračunamo kolika je ta razlika:

$$\overline{X}_{uz} - \overline{X}_{os} = 5{,}88 - 4{,}45 = 1{,}43 mmol/l$$

1. Postavljamo hipoteze:
Ho: Razlika od 1,43 mm mol/l holesterola nije statistički značajna već je posledica dejstva slučajnih faktora i ima karakter slučajne varijabilnosti. Uzorak se ponaša kao da pripada osnovnom skupu zdravih.
Ha: Razlika od 1,43 mm mol/l holesterola je statistički značajna i verovatno je posledica uticaja dijabeta, tako da uzorak ne pripada osnovnom skupu zdravih.

2. Odabir odgovarajućeg testa, čija je formula u ovom slučaju:

$$t = \frac{\overline{X}_{uz} - \overline{X}_{os}}{SG} = \frac{5{,}88 - 4{,}45}{SG}$$

$$SG = \frac{SD_{uz}}{\sqrt{n-1}} = \frac{0{,}64}{\sqrt{21-1}} = 0{,}14$$

$$t = \frac{1{,}43}{0{,}14} = 10{,}21$$

3. Stepen slobode za naš primer je: SS=n-1=21-1=20

Za broj stepena slobode 20 i prag značajnosti od 0,05 u tablicama očitavamo da je t= 2,09, a za isti broj stepena slobode i za p=0,01 granična tablična vrednost je t=2,84.

Stepen	nivo greške = p			
slobode	0,10	0,05	0,01	0,001
1	6,31	12,70	63,70	637,00
2	2,92	4,30	9,92	31,60
3	2,35	3,18	5,84	12,90
4	2,13	2,78	4,60	8,61
5	2,02	2,57	4,03	6,86
6	1,94	2,45	3,71	5,96
7	1,90	2,36	3,50	5,40
8	1,86	2,31	3,36	5,04
9	1,83	2,26	3,25	4,78
10	1,81	2,23	3,17	4,59
12	1,78	2,18	3,06	4,32
14	1,76	2,14	2,98	4,14
16	1,75	2,12	2,92	4,02
18	1,73	2,10	2,88	3,92
20	1,72	2,09	2,84	3,85
22	1,72	2,07	2,82	3,79
24	1,71	2,06	2,80	3,74
26	1,71	2,06	2,78	3,71
28	1,70	2,05	2,76	3,67
30	1,70	2,04	2,75	3,65
40	1,68	2,02	2,70	3,55
60	1,67	2,00	2,66	3,46
80	1,66	1,99	2,64	3,42
100	1,66	1,98	2,63	3,39
120	1,66	1,98	2,62	3,77
∞	1,645	1,96	2,576	3,291
Normalna distibucija				

$t = 10{,}21 > t_{(20\ \mathrm{i}\ 0{,}05)} = 2{,}09$ i $p<0{,}05$

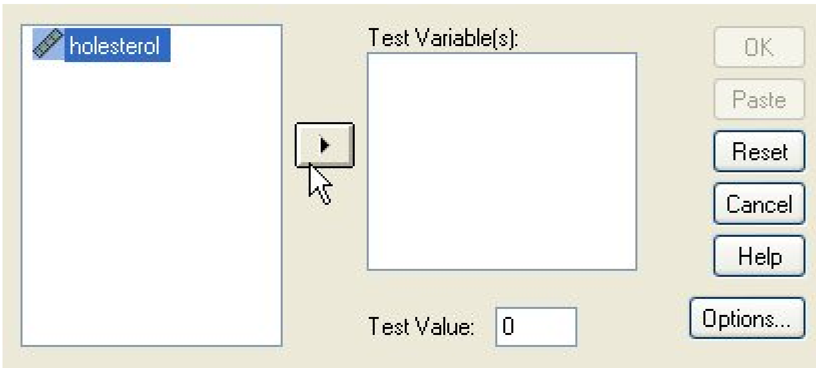
Kako je realizovana t-vrednost od 10,21 veća od granične tablične vrednosti, t=2,09, za broj stepeni slobode 20 i prag značajnosti od p=0,05, to odbacujemo nultu i prihvatamo alternativnu hipotezu sa greškom p<0,05 i sigurnošću P>95% tvrdimo da kod dijabetičara holesterol pokazuje znatno veće vrednosti nego kod zdravih osoba.
To je verovatno posledica dejstva same bolesti.
Uzorak od 21 dijabetičara prema visini holesterola ne pripada osnovnom skupu zdravih.

$t = 10{,}21 > t_{(20\ \mathrm{i}\ 0{,}01)} = 2{,}84$ i $p<0{,}01$

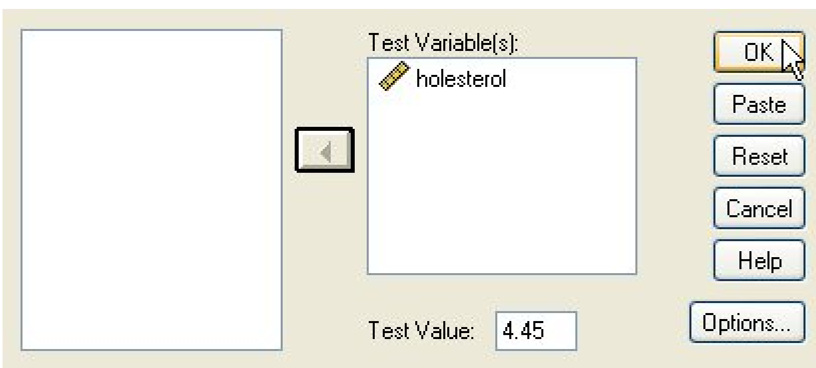
Kako je realizovana t-vrednost od 10,21 veća od granične tablične vrednosti, t=2,84, za broj stepeni slobode 20 i prag značajnosti od p=0,01, to odbacujemo nultu i prihvatamo alternativnu hipotezu sa greškom p<0,01 i sigurnošću P>99% tvrdimo da kod dijabetičara holesterol pokazuje znatno veće vrednosti nego kod zdravih osoba.

U SPSS-u se ovaj zadatak radi na sledeći način:

Da bi se aktivirao t test za osnovni skup i uzorak treba otići u *Analyse/Compare Means/One-Sample T Test,* na koji se klikne i pojavljuje se sledeći prozor:



U *Test Variable* treba ubaciti varijablu sa vrenostima holesterola 21 dijabetičara, a u *Test Value* prosečnu vrednost holesterola zdravih osoba koja iznosi 4,45.



Klikne se na *OK* i u *Output-u* dobiju rezultati:

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
holesterol	21	5.8857	.64287	.14029

One-Sample Test

	Test Value = 4.45					
					95% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Lower	Upper
holesterol	10.234	20	.000	1.43571	1.1431	1.7283

U prvoj tabeli je deskriptivna statistika varijable *holesterol:* veličina uzorka (N), $\overline{X}$, SD i SG.

U drugoj tabeli redom su date vrednosti: t, S.S., p, razlike između prosečnih vrednosti i 95% intervala poverenja te razlike.

t-test razlike između aritmetičkih sredina dva velika nezavisna uzorka

Testira značajnost razlike između prosečnih vrednosti dva velika nezavisna uzorka. Vrednost t testa se izračunava po formuli:

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{SD_1^2}{n_1 - 1} + \frac{SD_2^2}{n_2 - 1}}}$$

gde su:

$\overline{X}$ - aritmetička sredina jednog uzorka (obično se uzima veća vrednost da bi se izbegao negativan predznak)

SD_1^2 - varijansa istog uzorka

n_1 - veličina prvog uzorka

SD_2^2 - varijansa drugog uzorka

n_2 - veličina drugog uzorka uz uslov: $n>30$ ili $n_1+n_2>60$

Zaključak se donosi na sledeći način:

- t-realizovano < t = 1,96, prihvata se Ho a odbacuje Ha, p>0,05,
- t-realizovano ≥ t = 1,96 ,odbacuje se Ho a prihvata Ha, p < 0,05,
- t-realizovano ≥ t = 2,58, odbacuje se Ho a prihvata Ha i za nivo p < 0,01.

Pimer: Ispitivana je visina holesterola u krvi kod populacije seoskog i gradskog stanovništva. Merenje je izvršeno na slučajnim uzorcima odraslog stanovništva i kod 200 stanovnika sa sela prosečna vrednost holesterola iznosila je $\overline{X}$ = 7,5, a SD = 0,91. Kod 250 ispitanika iz grada prosečna visina holesterola bila je $\overline{X}$ = 6,73, a SD= 0,85.

Da li postoji značajna razlika izmedju proseka visine holesterola kod gradskog i seoskog stanovništva i da li je ona posledica razlike u načinu ishrane ili je posledica slučajnog karaktera?

Ho: 7,5 – 6,73 = 0,77 nije statistički značajna
Ha: 7,5 – 6,73 = 0,77 je značajna razlika i posledica je različitog načina ishrane

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{SD_1^2}{n_1 - 1} + \frac{SD_2^2}{n_2 - 1}}} = \frac{7{,}5 - 6{,}73}{\sqrt{\frac{0{,}91^2}{200 - 1} - \frac{0{,}84^2}{250 - 1}}} = 9{,}16$$

t = 9,16 > t = 1,96 i p<0,05

Kako je realizovana t-vrednost od 9,16 veća od granične vrednosti t=1,96 za prag značajnosti od p=0,05, to odbacujemo nultu i prihvatamo alternativnu hipotezu sa greškom p<0,05 i sigurnošću P>95% tvrdimo da je razlika između prosečne visine holesterola seoskog i gradskpog stanovništva statistički značajna.

To je verovatno posledica razlike u načinu ishrane.

t = 9,16 > t = 2,58 i p<0,01

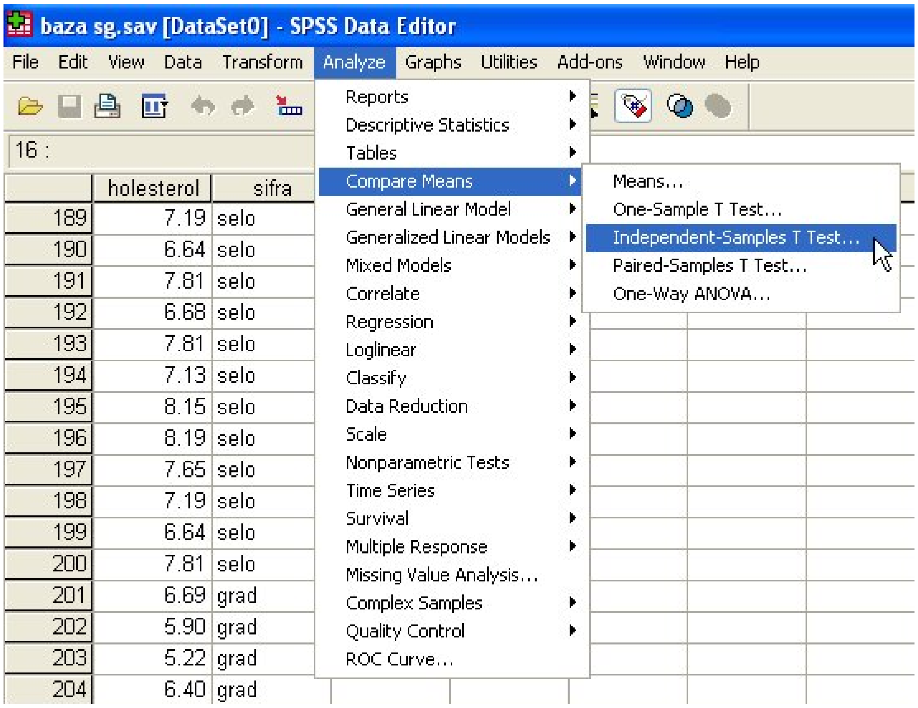
Kako je realizovana t-vrednost od 9,16 veća i od granične vrednosti t=2,84 za prag značajnosti od p=0,01, to odbacujemo nultu i prihvatamo alternativnu hipotezu sa greškom p<0,01 i verovatnoćom P>99%.

U SPSS-u se zadatak radi na sledeći način:

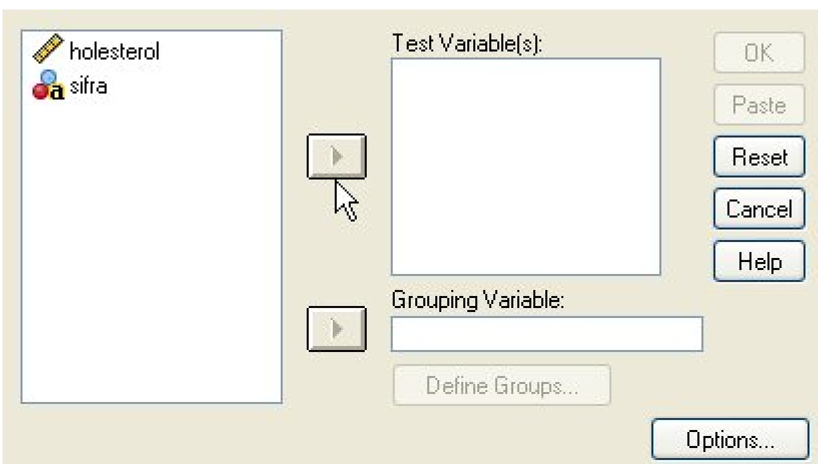
Pre izračunavanja testa napomena da treba formirati grupnu varijablu u kojoj se šifriraju ispitivane grupe, tj. u redovima u kojima su ispitanici sa sela u rubrici grupne varijable upisuje se šifra *selo,* a za ispitanike iz grada šifra *grad.*

Vrednosti holesterola svih ispitanika (i onih sa sela i onih iz grada) date su u varijabli *holesterol.*

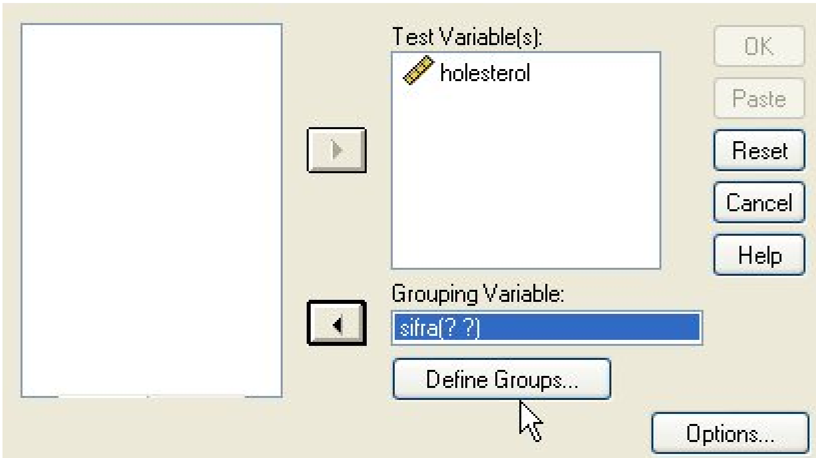
Da bi se aktivirao t test za nezavisne uzorke treba otići u *Analyse/Compare Means/Independent-Samples T Test.*



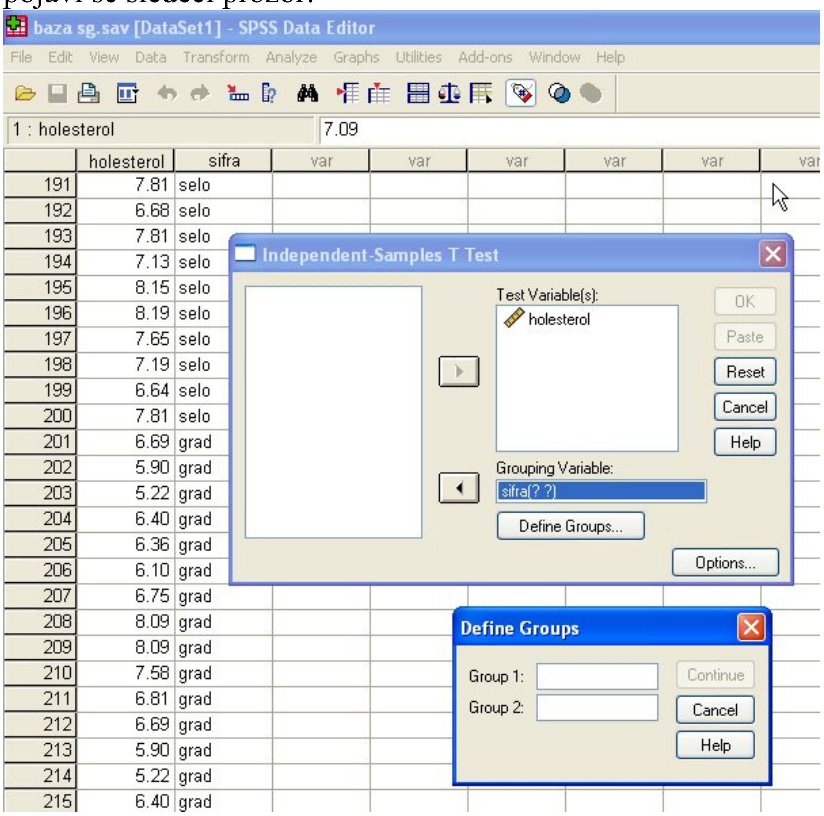
Nakon toga pojavljuje se sledeći prozor:



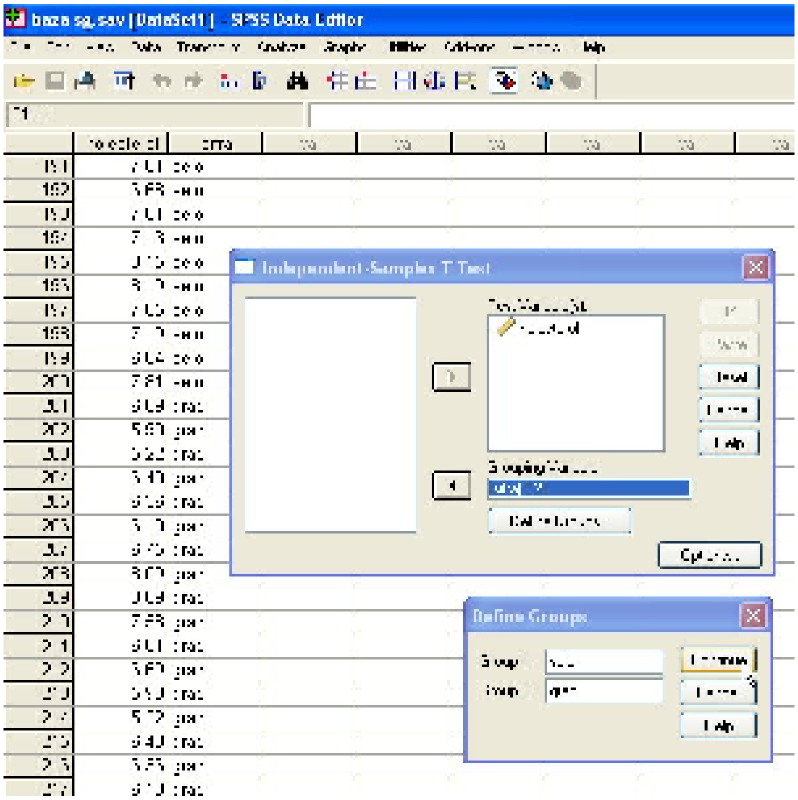
U *Test Variable* treba ubaciti varijablu koju ispitujemo, tj. varijablu *holesterol.* U *Grouping Variable* treba ubaciti grupnu varijablu u kojoj smo šifrirali seosko i gradsko stanovništvo, tj. varijablu *šifra.*



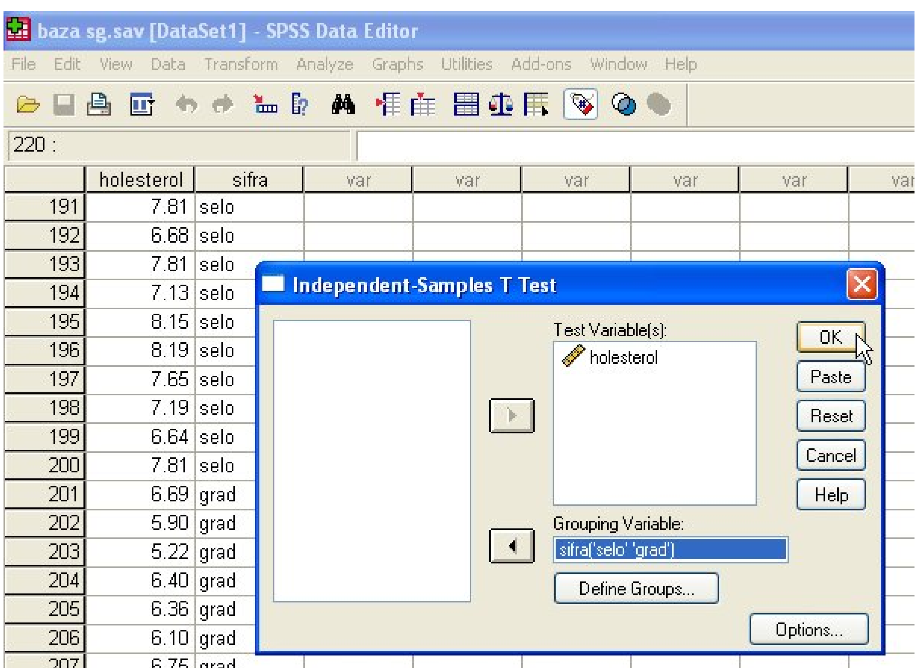
Sada treba definisati kako su šifrirane grupe ispitanika. Klikne se na *Define Groups* i pojavi se sledeći prozor:



U *Group 1* upiše se šifra prve grupe ispitanika, tj. *selo,* a u *Group 2* druge grupe, tj. *grad.*



Klikne se na *Continue:*



pa na *OK* i u *Output-u* se dobiju rezultati:

Group Statistics

	sifra	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
holesterol	selo	200	7.4980	.90794	.06420
	grad	250	6.7311	.84833	.05365

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
holesterol	Equal variances assumed	3.892	.049	9.235	448	.000	.76687	.08304	.60368	.93006
	Equal variances not assumed			9.166	413.026	.000	.76687	.08367	.60240	.93134

U prvoj tabeli je deskriptivna statistika varijabli *selo* i *grad,* tj. seoskog i gradskog stanovništva: veličina uzorka (N), $\overline{X}$, SD i SG.

U drugoj tabeli (u redu *Equal variances assumed*) čitamo vrednost t testa (u koloni *t*) i grešku p (u koloni *Sig. 2-tailed*).

t-test razlike između aritmetičkih sredina dva velika zavisna uzorka

Testira značajnost razlike između prosečnih vrednosti dva velika zavisna uzorka. Ako se eksperiment izvodi po metodu jedne grupe (jednog uzorka) gde je istovremeno grupa i kontrolna i eksperimentalna, onda se vrednosti ispitivanog obeležja mere i izračunavaju parametri *pre* i *posle* delovanja eksperimentalnog faktora. To je tzv. *nulta faza merenja.* Zatim se grupa podvrgava eksperimentalnom faktoru i po završetku eksperimenta mere se vrednosti istog obeležja i izračunavaju parametri. U postupku se dalje testira razlika između parametara pre (nulta faza) i nakon delovanja eksperimentalnog faktora. Međutim, u proceduri ne može da se kod iste osobe (kod istog objekta) isključi zavisnost vrednosti koje nastaju pri dejstvu eksperimentalnog faktora od početnih vrednosti. Između ovih vrednosti postoji izvestan stepen korelacije, pa se u formulu za izračunavanje t testa uvodi i ***faktor korelacije*** tj. vrednost koeficijenta linearne korelacije, kao relativne mere stepena korelacije.

Uvodi se i faktor korelacije tj. vrednost koeficijenta linearne korelacije, kao relativne mere stepena korelacije .

Vrednost t testa kod dva velika zavisna uzorka zavisi i od vrednosti koeficijenta linearne korelacije, pa obrazac ima izraz:

Koeficijent proste linearne korelacije

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{SD_1^2}{n_1 - 1} + \frac{SD_2^2}{n_2 - 1} - 2r_{x_1x_2}\frac{SD_1}{\sqrt{n_1}}\frac{SD_2}{\sqrt{n_2}}}}$$

t-test razlike između aritmetičkih sredina dva mala nezavisna uzorka

Koristi se za testiranje značajnosti razlike aritmetičkih sredina dva mala nezavisna uzorka, čije se aritmetičke sredine osnovnog skupa raspoređuju u vidu Studentovog t rasporeda. Naravno, podrazumeva se da su uzorci jednaki i dobijeni metodom slučajnosti iz istog uzorka.

Njegova formula je:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)SD_1^2 + (n_2 - 1)SD_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}}}$$

Data formula za t-test može se primeniti i za testiranje razlike aritmetičkih sredina dva velika nezavisna uzorka, ali ne i obrnuto.

Pri tumačenju realizovane t-vrednosti obavezna je primena i Studentovih tablica t-rasporeda

Stepen slobode se određuje po formuli: $S.S = n_1 + n_2 - 2$.

Ako je:

- t-realizovano < $t_{(SS\ i\ 0{,}05)}$, prihvata se Ho a odbacuje Ha, $p>0{,}05$,
- t-realizovano ≥ $t_{(SS\ i\ 0{,}05)}$,odbacuje se Ho a prihvata Ha, $p < 0{,}05$,
- t-realizovano ≥ $t_{(SS\ i\ 0{,}01)}$, odbacuje se Ho a prihvata Ha i za nivo $p < 0{,}01$.

Primer: Izmeren je radijalni puls kod dve grupe pacijenata. Jedna grupa je imala ugrađen pejsmeker, a druga nije imala. Dobijene su sledeće vrednosti:

N	Sa pejsmejkerom		Bez pejsmejkera	
	X_1	X_1^2	X_2	X_2^2
1	60	3600	67	4489
2	68	4624	72	5184
3	70	4900	72	5184
4	78	6084	84	7056
5	66	4356	69	4761
6	71	5041	80	6400
7	62	3844	68	4624
8	73	5329	74	5476
9	69	4761	78	6084
10	72	5184	81	6561
$\sum$	689	47723	745	55819

Da li postoji statistički signifikantna razlika između proseka radijalnog pulsa kod ove grupe pacijenata?

Moraju se izračunati aritmetičke sredine i standardne devijacije za obe grupe, prema već poznatim obrascima:

$$\overline{X}_1 = \frac{\sum X_1}{n_1} = \frac{689}{10} = 68{,}9 \qquad \overline{X}_2 = \frac{\sum X_2}{n_2} = \frac{745}{10} = 74{,}5$$

$$SD_1 = \sqrt{\frac{\sum X_1^2}{n_1} - \overline{X}_1^2} = \sqrt{\frac{47723}{10} - 68{,}9^2} = 5{,}01$$

$$SD_2 = \sqrt{\frac{\sum X_2^2}{n_1} - \overline{X}_2^2} = \sqrt{\frac{55819}{10} - 74{,}5^2} = 5{,}63$$

Sada se može pristupiti testiranju.
Ho: 74,5-68,9=5,6 nije statistički značajna;
Ha: 74,5-68,9=5,6 statisticki je značajna i posledica je ugradnje pejsmejkera.

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)SD_1^2 + (n_2-1)SD_2^2}{n_1+n_2-2} \cdot \frac{n_1+n_2}{n_1 \cdot n_2}}} = \frac{5{,}6}{\sqrt{\frac{9 \cdot 5{,}01^2 + 9 \cdot 5{,}63^2}{18} \cdot \frac{20}{100}}} = \frac{5{,}6}{2{,}38} = 2{,}35$$

Stepen slobode	nivo greške = p			
	0,10	0,05	0,01	0,001
1	6,31	12,70	63,70	637,00
2	2,92	4,30	9,92	31,60
3	2,35	3,18	5,84	12,90
4	2,13	2,78	4,60	8,61
5	2,02	2,57	4,03	6,86
6	1,94	2,45	3,71	5,96
7	1,90	2,36	3,50	5,40
8	1,86	2,31	3,36	5,04
9	1,83	2,26	3,25	4,78
10	1,81	2,23	3,17	4,59
12	1,78	2,18	3,06	4,32
14	1,76	2,14	2,98	4,14
16	1,75	2,12	2,92	4,02
18	1,73	$\boxed{2,10}$	2,88	3,92
20	1,72	2,09	2,84	3,85
22	1,72	2,07	2,82	3,79
24	1,71	2,06	2,80	3,74
26	1,71	2,06	2,78	3,71
28	1,70	2,05	2,76	3,67
30	1,70	2,04	2,75	3,65
40	1,68	2,02	2,70	3,55
60	1,67	2,00	2,66	3,46
80	1,66	1,99	2,64	3,42
100	1,66	1,98	2,63	3,39
120	1,66	1,98	2,62	3,77
∞	1,645	1,96	2,576	3,291
Normalna distibucija				

SS = n1 + n2 -2 = 10 + 10 - 2 = 18

Za SS = 18 i za p = 0,05 granična tablična vrednost je t = 2,10

$t = 2{,}35 > t_{(18\ \mathrm{i}\ 0{,}05)} = 2{,}10$ i $p < 0{,}05$

Kako je realizovana t-vrednost od 2,35 veća od granične tablične vrednosti t=2,10, za broj stepeni slobode 18 i prag značajnosti od p=0,05, to odbacujemo nultu hipotezu i prihvatamo alternativnu sa greškom p>0,05 i sigurnošću P>95% tvrdimo: razlika od 5,6 između prosečnog radijalnog pulsa pacijenata sa i bez pejs mejkera je statistički značajna.

$t = 2{,}35 < t_{(18\ \mathrm{i}\ 0{,}01)} = 2{,}88$ i $p > 0{,}01$

Greška p<0,05, ali je p>0,01, tako da ne možemo tvrditi i sa sigurnošću većom i od 99% da je razlika signifikantna.

U SPSS-u se t test razlike između aritmetičkih sredina dva mala nezavisna uzorka radi kao i t test za dva velika nezavisna uzorka.

t-test razlike između aritmetičkih sredina dva mala zavisna uzorka

Da bi se izbeglo izračunavanje koeficijenta linearne korelacije, kod dva mala zavisna uzorka primenjuje se posebna tehnika izračunavanja, poznata kao t-test diferencije.
Princip "diferencije" sastoji se u tome da se niz individualnih razlika, tretira kao poseban uzorak, za koga se izračunava $\overline{X}_{diferencije}$, $SD_{diferencije}$ i $SG_{diferencije}$.

Vrednost t-testa se dobija, kao količnik aritmetičke sredine diferencije ($\overline{X}_{diferencije}$) i standardne greške diferencije ($SG_{diferencije}$) pa je njegova formula:

$$t = \frac{\overline{x}_{dif}}{SG_{dif}}$$

Pri tumačenju realizovane t-vrednosti obavezna je primena i Studentovih tablica t-rasporeda

Stepen slobode se određuje po formuli: S.S = n - 1.

Ako je:

- t-realizovano < $t_{(SS\ i\ 0,05)}$, prihvata se Ho a odbacuje Ha, $p>0,05$,
- t-realizovano ≥ $t_{(SS\ i\ 0,05)}$,odbacuje se Ho a prihvata Ha, $p < 0,05$,
- t-realizovano ≥ $t_{(SS\ i\ 0,01)}$, odbacuje se Ho a prihvata Ha i za nivo $p < 0,01$.

Primer: Izmeren je sistolni pritisak kod jednog fudbalskog tima, neposredno pre i neposredno posle odigrane utakmice. Dobijene su sledeće vrednosti:

fudbaler	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
pre	128	132	138	120	140	135	135	140	145	135	148
posle	137	135	136	130	148	140	140	140	150	134	150

Da li postoji statistički značajna razlika u sistolnom krvnom pritisku fudbalera pre i posle utakmice?

Ho: Ne postoji signifikantna razlika u sistolnom pritisku fudbalskog tima pre i posle utakmice
Ha: Postoji signifikantna razlika u sistolnom pritisku fudbalskog tima pre i posle utakmice

Sada pravimo radnu tabelu:

Fudbaler	Sistolni pritisak		niz diferencije	$d = (X_2 - X_1) - \overline{X}_{dif}$	d^2
N	pre (X_1)	posle (X_2)	$X_2 - X_1$		
1	128	137	9	$9 - 4 = 5$	25
2	132	135	3	$3 - 4 = -1$	1

3	138	136	-2	$-2-4=-6$	36
4	120	130	10	$10-4=6$	36
5	140	148	8	$8-4=4$	16
6	135	140	5	$5-4=1$	1
7	135	140	5	$5-4=1$	1
8	140	140	0	$0-4=-4$	16
9	145	150	5	$5-4=1$	1
10	135	134	-1	$-1-4=-5$	25
11	148	150	2	$2-4=-2$	4
Σ	-	-	44	0	162

$\overline{X}_{dif} = \dfrac{\sum(X_2 - X_1)}{n} = \dfrac{44}{11} = 4$ prosečno povećanje pulsa po jednom fudbaleru

$$SD_{dif} = \sqrt{\frac{\sum\left[(X_2 - X_1) - \overline{X}_{dif}\right]^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\frac{162}{11}} = 3{,}84$$

$$SG_{dif} = \frac{SD_{dif}}{\sqrt{n-1}} = \frac{3{,}84}{\sqrt{11-1}} = \frac{3{,}84}{\sqrt{10}} = \frac{3{,}84}{3{,}16} = 1{,}22$$

$$t = \frac{\overline{x}_{dif}}{SG_{dif}} = \frac{4}{1{,}22} = 3{,}28$$

S.S. = n-1 = 11-1 = 10

$t = 3{,}28 > t_{(10 \text{ i } 0{,}05)} = 2{,}23$ i $p < 0{,}05$

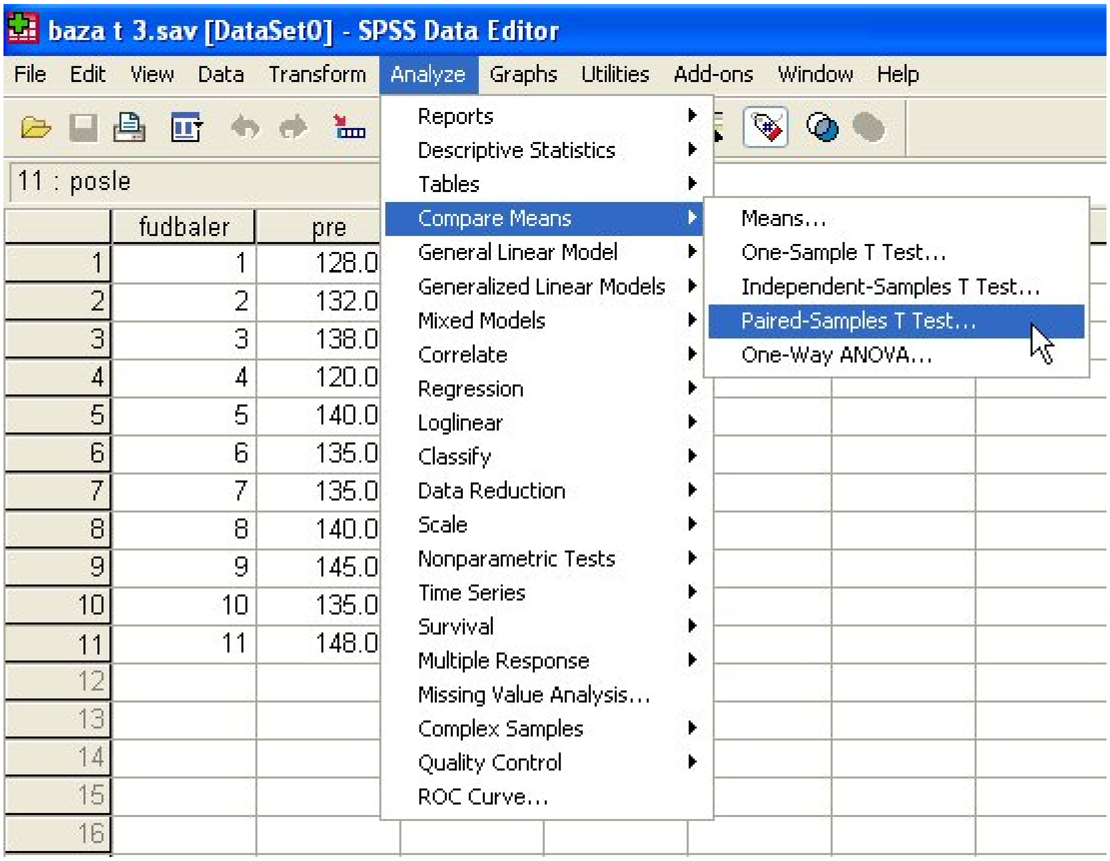
Kako je realizovana t-vrednost od 3,28 veća od granične tablične vrednosti, t=2,23, za broj stepeni slobode 10 i prag značajnosti od p=0,05, to odbacujemo nultu i prihvatamo alternativnu hipotezu sa greškom p<0,05 i sigurnošću P>95% tvrdimo da postoji signifikantna razlika u sistolnom pritisku fudbalskog tima pre i posle utakmice.

$t = 3{,}28 > t_{(10 \text{ i } 0{,}01)} = 3{,}17$ i $p < 0{,}01$

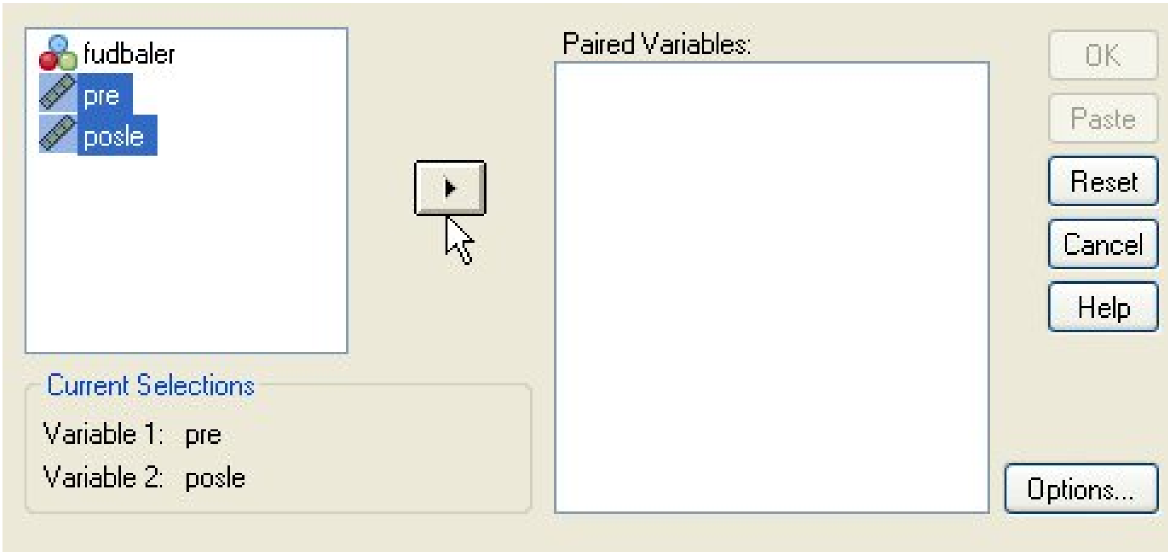
Kako je realizovana t-vrednost od 3,28 veća od granične tablične vrednosti, t=3,17, za broj stepeni slobode 10 i prag značajnosti od p=0,01, to i na ovom nivou odbacujemo nultu hipotezu i sa sigurnošću većom od 99% tvrdimo da je razlika statistički značajna.

U SPSS-u se testiranje razlike između aritmetičkih sredina zavisnih uzoraka vrši na sledeći način:

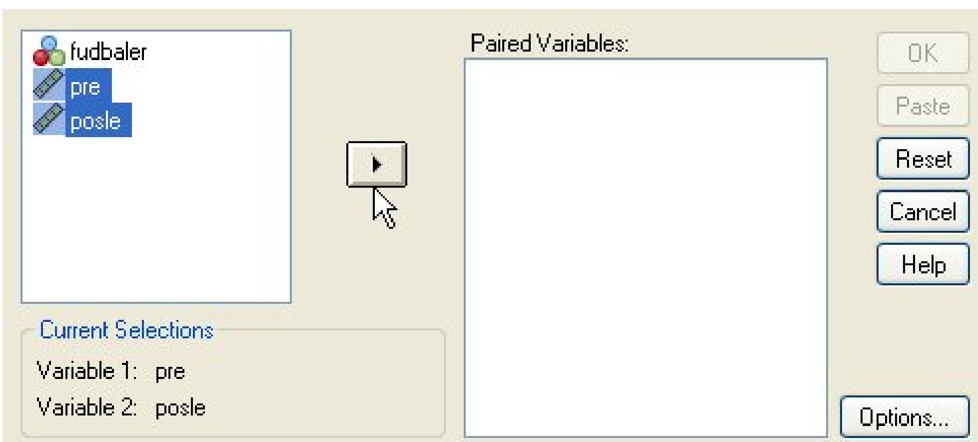
Da bi se aktivirao t test za zavisne uzorke treba otići u *Analyse/Compare Means/Paired-Samples T Test.*



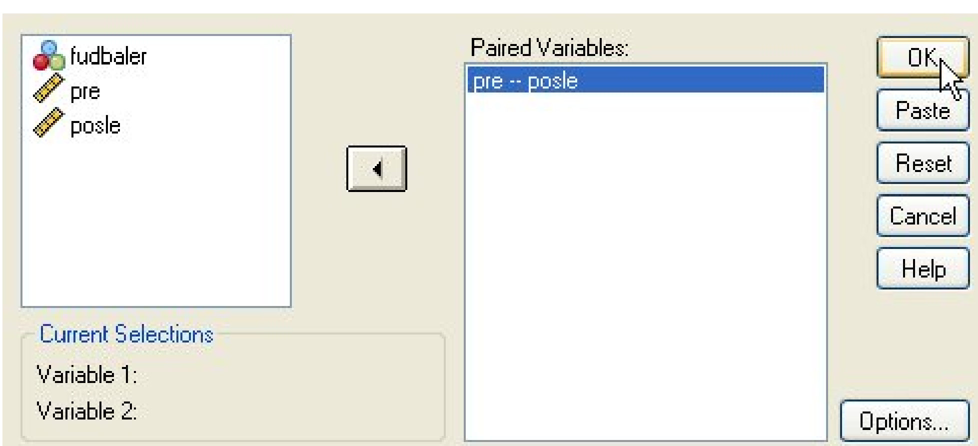
Nakon toga se pojavi sledeći prozor:



Zatim se obeleži varijabla sa vrednostima pre eksperimenta, tj. varijabla *pre* i na taj način prebaci u *Current Selection* na mesto prve varijable (*Variable 1*) i posle eksperimenta, tj. varijabla *posle* i stavi na mesto druge varijable (*Variable 2*).



Tako uparene vrednosti pre i posle eksperimenta se prebace u *Paired Variables.*



Klikne se na *OK* i u *Output-u* dobiju rezultati:

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	pre	136.0000	11	7.74597	2.33550
	posle	140.0000	11	6.70820	2.02260

Paired Samples Correlations

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	pre & posle	11	.854	.001

Paired Samples Test

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
					95% Confidence Interval of the Difference				
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	Lower	Upper			
Pair 1	pre - posle	-4.00000	4.02492	1.21356	-6.70398	-1.29602	-3.296	10	.008

U poslednjoj tabeli se čita vrednost t testa (u koloni *t*) i greška p (u koloni *Sig. 2-tailed*).

t-test proporcije

Na istim principima na kojima se testira i ocenjuje razlika između dve aritmetičke sredine može da se oceni i značajnost razlike između dve proporcije.

Proporcije mogućih jednakih uzoraka dobijenih iz istog osnovnog skupa, raspoređuju se u vidu binomnog rasporeda oko prave proporcije skupa. Kada su uzorci veći od 30 jedinica i kada je verovatnoća "povoljnog" događaja blizu vrednosti od 0,5 mogu da se koriste tablice normalnog rasporeda.

Za distribuciju proporcija uzoraka, kao i za aritmetičke sredine uzoraka, može da se izračuna standardna greška proporcije, koja pokazuje koliko je proporcija nekog uzorka udaljena od prave proporcije osnovnog skupa, odnosno što je važnije - koliko je prava proporcija osnovnog skupa udaljena od proporcije uzorka.

Ako je uzorak dovoljno veliki (n > 30, neki smatraju i n > 100), obrazac za standardnu grešku proporcije je:

$$SG_p = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \text{ ili } SG_p = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

gde je: n - veličina uzorka, a p i q - proporcije dihotomnih modaliteta, odnosno p je relativno (proporcionalno) učešće posmatranog modaliteta u uzorku.

Standardnu grešku razlike proporcija dva uzorka, izračunavamo kao koren iz zbira kvadrata grešaka proporcija:

$$SG_{p_1-p_2} = \sqrt{\frac{p_1 \cdot q_1}{n_1} + \frac{p_2 \cdot q_2}{n_2}} \quad \text{ili} \quad SG_{p_1-p_2} = \sqrt{\frac{p_1 \cdot (1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2 \cdot (1-p_2)}{n_2}}$$

Da bi se pokazala statistička značajnost razlike proporcija dva uzorka (p1 - p2) i odbacila nulta hipoteza kod proporcija, ta razlika mora da bude odgovarajući broj puta veća od njene standardne greške pa je obrazac za *t-test razlike proporcija dva velika nezavisna uzorka:*

$$t = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{p_1 \cdot q_1}{n_1} + \frac{p_2 \cdot q_2}{n_2}}}$$

Zaključak se donosi na sledeći način:

- t-realizovano < t = 1,96, prihvata se Ho a odbacuje Ha, p>0,05,
- t-realizovano ≥ t = 1,96 ,odbacuje se Ho a prihvata Ha, p < 0,05,
- t-realizovano ≥ t = 2,58, odbacuje se Ho a prihvata Ha i za nivo p < 0,01.

Primer: U grupi od 150 muškaraca od hipertenzije je obolelo 45, a u grupi od 200 žena iste starosne dobi od hipertenzije je bolovalo 70. Da li postoji statistički značajna razlika među polovima po zastupljenosti hipertenzije?
H0: Ne postoji signifikantna razlika između zastupljenosti hipertenzije kod mučkaraca i žena
Ha: Postoji signifikantna razlika između zastupljenosti hipertenzije kod mučkaraca i žena

U postupku najpre izračunavamo proporcije za oba uzorka:

$$p_1 = \frac{45}{150} = 0{,}3\,;\; q_1 = 1 - p_1 = 0{,}7$$

$$p_2 = \frac{70}{200} = 0{,}35\,;\; q_2 = 1 - p_2 = 0{,}65$$

Diferencija = $p_2 - p_1 = 0{,}35 - 0{,}3 = 0{,}05$ ili 5%

Iz dobijenih vrednosti sledi:

t = 0,99 < t = 1,96 i p > 0,05

Kako je dobijena vrednost t=0,99 manja od 1,96, ne postoji statistički značajna razlika između zastupljenosti hipertenzije kod muškaraca i žena. Nulta hipoteza nije odbačena jer je p>0,05.

Kod *t testa razlike proporcija dva velika zavisna uzorka* u obrazac se uvodi korektivni faktor zbog korelacije među posmatranim modalitetima, pa formula glasi:

$$t = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{p_1 \cdot q_1}{n_1 - 1} + \frac{p_2 \cdot q_2}{n_2 - 1} - 2r_{12}\sqrt{\frac{p_1 \cdot q_1}{n_1} + \frac{p_2 \cdot q_2}{n_2}}}}$$

Na ilustraciji t testa razlike između proporcija dva mala uzorka nećemo se zadržavati, jer se u praksi znatno višeupotrebljava neparametrijski χ^2 test.

Zadaci za vežbanje

1. U porodilištu u Nišu je izmereno 70 novorođenčadi i dobijene su sledeće vrednosti: $\overline{X} = 3450g$, SD=280g. Na osnovu raznih istraživanja, postavljena je hipoteza da prosečna težina novorođenčadi u Nišu iznosi $\overline{X} = 3400g$. Da li se izmerena telesna težina 70 novorođenčadi razlikuje od poznatog proseka za ceo grad?

2. Izvršeno je merenje telesne visine dečaka trćeg razreda dve osnovne škole u Nišu i dobijeni su sledeći rezultati:

Škola A n=290 $\overline{X} = 138{,}3$ SD = 6,3

Škola B n=320 $\overline{X} = 141{,}1$ SD = 7,2

Da li se prosečne telesne visine dečaka dve škole značajno razlikuju?

3. Merena je prosečna vrednost sistolnog krvnog pritiska nakon maksimalnog trčanja deonice od 100m. U istraživanju je učestvovalo 80 žena i 100 muškaraca. Prosečna vrednost sistolnog pritiska (u mm Hg) za žene nakon opterećenja je iznosila 155, a kod muškaraca 140. Da li postoji signifikantna razlika između prosečnog sistolnog pritiska muškaraca i žena?

4. Određivan je hemoglobin periferne krvi zdravih ispitanika i dobijene su sledeće vrednosti od: $\overline{X} = 88$ i SD = 2,4 za 25 muškaraca i $\overline{X} = 83$ i SD = 1,4 za 23 žene. Da li je hemoglobin značajno različit u odnosu na pol?

5. Odabrana su dva uzorka od po 20 pacijenata sa povišenim holesterolom u krvi. Jedna grupa je lečena dotadašnjim poznatim terapijskim metodama. Po završetku lečenja dobijene su sledeće vrednosti: $\overline{X} = 6{,}5 mmol/l$ i SD = 0,7. Druga grupa pacijenata je pored klasične terapije bila podvrgnuta i specifičnoj dijeti. Posle istog vremena lečenja kao i kod prve grupe, dobijene su sledeće vrednosti: $\overline{X} = 6{,}25$ i SD = 0,6. Da li je dijeta imala uticaj na smanjenje holesterola u krvi?

6. U jednom epidemiološkom istraživanju čiji je zadatak bio da se utvrde mogući etiološki faktori za nastanak nekog oboljenja ispitivano je 100 osoba i meren nivo hemoglobina pre i nakon izlaganja faktorima i dobijene su sledeće vrednosti: $\overline{X}_{pre} = 15{,}5$, $SD_{pre} = 3{,}2$, $\overline{X}_{posle} = 20{,}1$, $SD_{posle} = 3{,}8$. Da li postoji signifikantna razlika između prosečne visine hemoglobina ispitanika pre i nakon izlaganja faktorima rizika?

7. Izmerene su vrednosti albumina (g/l) 12 ispitanika pre i posle tretmana i dobijene su sledeće vrednosti:

ispitanici	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
pre	58	52	53	46	58	49	46	53	51	57	48	45
posle	57	62	51	49	68	65	54	59	44	66	64	45

Da li je došlo do značajnog sniženja albumina posle tretmana?

Prilog. Studentova t-distribucija.

SS	**p**			
	0,10	**0,05**	**0,01**	**0,001**
	10%	5%	1%	0,1%
1	6,31	12,70	63,66	636,62
2	2,92	4,30	9,93	31,60
3	2,35	3,18	5,84	12,92
5	2,02	2,57	4,03	6,87
8	1,86	2,31	3,36	5,04
9	1,83	2,26	3,25	4,78
10	1,81	2,23	3,17	4,59
18	1,73	2,10	2,88	3,92
20	1,72	2,09	2,85	3,85
22	1,72	2,07	2,82	3,79
24	1,71	2,06	2,80	3,75
40	1,68	2,02	2,70	3,55
60	1,67	2,00	2,66	3,46
120	1,66	1,98	2,62	3,37
∞	1,64	1,96	2,58	3,29